Une approche du chaos

POUR VISITER MES AUTRES PAGES, CLIQUER ICI

Sommaire :

Bibliographie :

- I. Stewart, *Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos*, Flammarion, Collection Champs, Paris, 1994

- Jean-Paul Delahaye, *Information, complexité et hasard*, Editions Hermès, Paris, 1994

Au XVIIIème siècle, Newton a révolutionné la pensée scientifique en donnant une vision d'un Univers "réglé comme une horloge". Nous étions alors au coeur d'un monde régi par le déterminisme, c'est à dire que des lois immuables gouvernaient le mouvement de la moindre particule de l'univers. Depuis, l'idée d'un monde réglé comme une horloge a fait place à celle d'une loterie cosmique. Citons la phrase célèbre d'Einstein dans une lettre à Max Born : "Tu crois au dieu qui joue aux dés, et moi à la seule valeur des lois". Aujourd'hui on commence à découvrir qu'il n'est pas toujours possible de prédire le comportement de systèmes régis par des lois immuables et précises. En effet, des lois simples peuvent ne pas engendrer des comportements simples. Pour nous en convaincre, nous allons étudier les effets de la fonction "chapeau de clown".

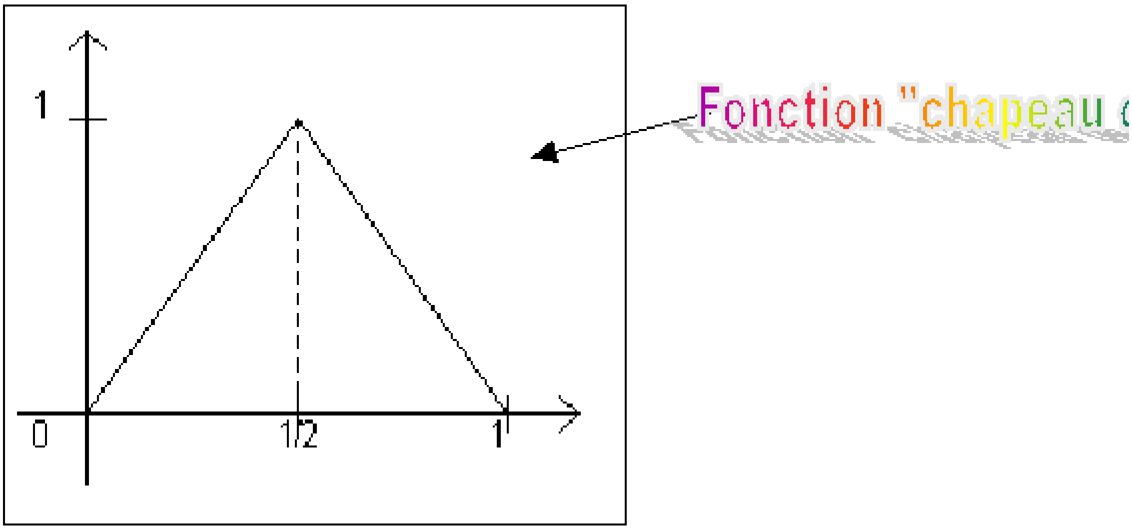
1) La fonction "chapeau de clown" : retour début

1.1) Présentation :

Existe-t-il fonction plus simple que la fonction chapeau de clown ? Sa représentation graphique n'est composée que de 2 segments.

Cette fonction est définie comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} f:[0,1] \to [0,1] \\ \quad x \ \mapsto \begin{cases} 2.x \text{ si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 2.(1-x) \text{ si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$



Au point 1/2, les valeurs de la fonction coïncident donc la fonction est continue sur [0,1].

Elle est dérivable sur tout l'intervalle sauf à la pointe du chapeau (x=1/2).

Trivialement, elle est croissante sur [0,1/2[et décroissante sur]1/2,1].

Que donnent les itérations de la fonction f ?

1.2) Exemples de calculs :

On choisit un valeur x_0 appelée germe et on calcule $f(x_0)=x_1$, $f(f(x_0))=f(x_1)=x_2$ ...

Essayons différents germes :

- pour $x_0=1/2$, on a $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$... Il y a stabilisation sur 0.

- pour $x_0=1/4$, on a $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$... Même stabilisation.

On peut généraliser : tout germe de la forme $1/2^p$ entraîne une stabilisation sur 0 après p étapes.

- pour $x_0=1/3$, on a $x_1=2/3$, $x_2=2/3$, $x_3=2/3$... Il y a stabilisation sur 2/3.

- pour x_0=5/6, on a x_1=1/3, x_2=2/3, x_3=2/3... Même stabilisation.

La généralisation peut aussi se faire : pour tout germe de la forme $1/3.2^p$, il y a stabilisation sur 2/3 après p étapes.

1.3) Cycles selon le germe :

On peut tout de même se demander si pour tout germe, la suite se stabilise ?

Le germe x_0=1/5 provoque un drôle de comportement. En effet au bout de quelque temps, la suite oscille entre 2 valeurs : 2/5 et 4/5. Alors on dit que (2/5,4/5) est un cycle d'ordre 2, et que le germe 1/5 est un point cyclique (c'est à dire qu'il conduit à un cycle).

Y-a-t-il aussi des cycles d'ordres plus élevés ?

Il suffit de prendre x_0=2/7 pour s'en convaincre, ainsi x_1=4/7, x_2=6/7, x_3=2/7... On a donc un cycle d'ordre 3.

Plus généralement, un germe de la forme $x_0=2/(2^p-1)$ donne un cycle d'ordre p.

Résumons : La fonction chapeau de clown peut se stabiliser vers 0 ou 2/3, ou donner naissance à des cycles de toutes les longueurs possibles. Tout dépend du germe. Mais est-ce-que tout germe conduit à une stabilisation ou à un cycle ?

A partir de maintenant, nous allons calculer en base 2 pour montrer que la réponse est non.

En base dix, quand on divise un nombre par 10, on décale la virgule d'un rang vers la gauche. De la même façon, en base 2, quand on divise un nombre par 2, on décale la virgule d'un rang vers la gauche.

- Ainsi dans le cas d'un nombre inférieur à 1/2 (en binaire le 1er chiffre après la virgule est un 0), il suffira pour connaître l'itéré suivant de décaler tous les chiffres d'une case vers la gauche.

Autre remarque : Si x est un nombre compris entre 0 et 1 et écrit en binaire, alors 1-x s'obtiendra en inversant la parité (c'est à dire en changeant tous les 0 en 1 et tous les 1 en 0).

ex : 1-0.100100100...=0.011011011... La démonstration est immédiate. Il suffit de vérifier que 0.111111111... =1

Soit x = 0.111111111... alors 2.x = 1.111111111... d'où 2x-x = x = 1

- Ainsi dans le cas d'un nombre supérieur à 1/2 (en binaire, le 1er chiffre après la virgule est un 1), on devra pour connaître l'itéré suivant décaler tous les chiffres d'un rang vers la gauche et changer la parité.

- Généralisation pour calculer x_n (cf ci-dessous) :

Exemple de calcul de X_n (itéré n fois de X_0 par la fonction f)

X_0 = 0.110110110110110110110110110101...

X_1 = 0.010010010010010010010010010...

X_2 = 0.100100100100100100100100010...

X_3 = 0.110110110110110110110110101... = X_0

X_4 = 0.010010010010010010010010... = X_1

X_5 = 0.100100100100100100100010... = X_2

X_6 = 0.110110110110110110110101... = X_0

....

X_n = 0.1101101101101101...

X_{n+1} = 0.010010010010010...

X_{n+2} = 0.10010010010010...

Lorsqu'on écrit les nombres en base 2, on connaît facilement le $n^{ième}$ itéré du germe X_0, il suffit de décaler ses chiffres de n rangs vers la gauche, en changeant la parité quand le $n^{ième}$ chiffre de X_0 est un 1.

Si le $n^{ième}$ chiffre après la virgule de x_0 est un zéro, alors nous obtenons x_n en effaçant les n premiers chiffres de x_0. Et si le $n^{ième}$ chiffre après la virgule de x_0 est un 1, alors nous effaçons les n premiers chiffres et changeons tous les 0 en 1 et tous les 1 en 0.

De ces remarques on peut en déduire une propriété : Pour qu'un germe soit cyclique (c'est à dire conduisant à un cycle) , il faut et il suffit que son écriture en base 2 le soit. Or le 2ème exposé nous avait montré que quel que soit la base , l'écriture des nombres rationnels est cyclique à partir d'un certain rang. **Donc, dans la cas de la fonction chapeau de clown, pour qu'un germe soit cyclique, il suffit que ce germe soit un nombre rationnel.**

Mais alors que se passe-t-il pour d'autres nombres ?

1.4) Attracteurs étranges :

Pour la fonction chapeau de clown, on sait que les germes rationnels conduisent à un cycle. On va étudier quelques germes irrationnels, toujours en binaire.

- Soit x_0=0.01001000100001... (environ 0.2832651 en décimal)

  Ce germe est formé de 1 séparés par un nombre croissant de 0.

  x_1=0.1001000100001... proche de 0.1 (=1/2)

  x_2=0.110111011110... proche de 1

  x_3=0.01000100001... proche de 0.01 (=1/4)

  x_4=0.1000100001... proche de 0.1 (=1/2)

  x_5=0.111011110... proche de 1

  x_6=0.00100001... proche de 0.001 (=1/8)

  Le germe s'écrit avec un nombre croissant de 0 donc par la fonction chapeau de clown, il existe un x_i proche de 0.0001 (=1/16), un x_j proche de 0.00001 (=1/32) et ainsi de suite ($i,j \in \aleph$). La suite s'approche infiniment souvent près des nombres $1/2^p$, $p \in \aleph$.

Un **point d'accumulation** est un point près duquel la suite des itérés passe infiniment souvent.

  ex : 1, 1/2, 1/4,... sont des points d'accumulation de la suite générée par 0.010010001...

L'**attracteur étrange** d'une suite est l'ensemble des points d'accumulation de cette suite.

  L'attracteur étrange du dernier exemple est $\{1/2^p, p \in \aleph\}$ et il est infini.

Lorsque l'attracteur étrange est infini, la suite est dite **turbulente (ou chaotique)**.

Donc une suite turbulente n'est ni convergente, ni cyclique (sinon son attracteur étrange serait fini).

On peut se demander s'il existe d'autres attracteurs infinis pour la fonction "chapeau de clown" ?

- 2ème exemple : le *nombre de Champernowne*.

x_0=0.01 10 11 100 101 110... c'est à dire les nombres entiers successifs écrits en binaire (environ 0.4311203 en décimal)

On s'aperçoit que ce germe donne une suite qui ne se stabilise jamais vers une ou plusieurs valeurs, mais qui s'approche une infinité de fois près des nombres compris entre 0 et 1. L'attracteur étrange est l'ensemble [0,1], il est infini, donc la suite issue du nombre de Champernowne est turbulente.

Ces deux exemples de germes irrationnels n'ont pas le même comportement que les germes rationnels. On peut les différencier en points calmes et en points turbulents.

1.5) Points calmes, points turbulents :

Définitions :

Un **point calme** est un germe qui a un comportement régulier. La suite issue de ce germe est soit convergente, soit cyclique.

Un **point turbulent** est un germe dont le comportement est chaotique.

Remarque : Les nombres rationnels sont les points calmes par la fonction "chapeau de clown", mais ils peuvent être turbulents par d'autres fonctions.

Pour exemple, on peut prendre la suite $x_{n+1} = r.x_n.(1-x_n)$ (*évolution des espèces*)

$\forall r \in [0,3]$ la suite est convergente.

$0 \langle r \langle 3$ est un point calme.

Mais si on prend r=4 et x_0=0.1, la suite a un comportement chaotique. 0,1 est un point turbulent, bien qu'il soit rationnel !

- On sait qu'entre 2 rationnels, il existe toujours un irrationnel et entre 2 irrationnels, il existe un rationnel.

Donc pour la fonction "chapeau de clown", **entre 2 points calmes il existe toujours un point turbulent** et **entre 2 points turbulents, il existe toujours un point calme**.

Les mathématiciens ont montré que pour n'importe quelle fonction, un point est soit calme, soit turbulent. Il n'existe pas d'autre type de points.

- On a vu précédemment la définition d'une suite turbulente. La définition d'une suite calme (convergente ou périodique) peut s'écrire sous cette forme :

Une suite calme est une suite qui, lorsque nous en distribuons régulièrement les termes en p paquets, donne p suites convergentes dont les limites forment un cycle d'ordre p.

ex : Soit la suite 1/2, 1-1/3, 1/4, 1-1/5, 1/6... on peut séparer les termes de cette suite en 2 paquets :

* 1/2, 1/4, 1/6, 1/8... tend vers 0.

* 1-1/3, 1-1/5, 1-1/7... tend vers 1.

Une telle suite est calme, cyclique d'ordre 2.

- Toute suite provenant de l'itération d'une fonction continue donne soit une suite calme, soit une suite turbulente. Mais pour une fonction contenant un cycle d'ordre 3, on obtient des résultats étonnants...

2) La période 3 implique le chaos : retour début

Théorème de Sharkowski :

Il existe un résultat étonnant.

D'après le théorème de Sharkowski, si une fonction possède un cycle d'ordre 3, alors :

a. elle possède des cycles de tous les ordres possibles
b. il existe des germes turbulents

La taille des cycles des fonctions continues d'une variable réelle possède un ordre secret qui s'exprime par un tableau infini :

Nombres impairs	3	5	7	9	11	...	...
Doubles	6	10	14	18	22	...	...
Quadruples	12	20	28	36	44	...	...
Octuples	24	40	56	72	88	...	...
Puissances de 2	infini	...	...	...	...	4	2

Le théorème implique que si une fonction possède un cycle d'ordre x alors elle possède un cycle d'ordre y (y situé après x dans le tableau). D'où la période 3 implique le chaos.

- Pour la fonction " chapeau de clown ", le tableau montre qu'elle a un cycle d'ordre 3 donc aussi de tous les ordres possibles.

- L'importance des cycles d'ordre une puissance de 2 était apparue avant qu'on ne redécouvre les résultats du mathématicien russe.

Prenons pour exemple une fonction qui décrit l'évolution des populations animales :
$x_{n+1}=r.x_n.(1-x_n)$ (= fonction logistique)

- Pour r inférieur à $L_1=3$, la fonction a un cycle d'ordre 1

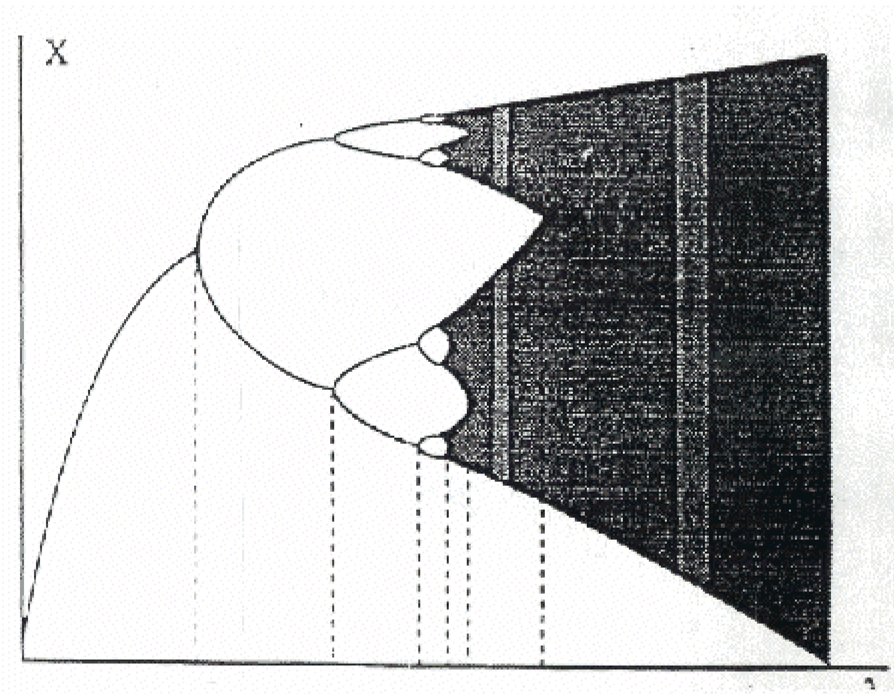
- Pour r compris entre 3 et $L_2=3{,}5$ elle possède un cycle d'ordre 2 donc également un cycle d'ordre 1.

- Plus loin vers $L_3=3{,}56$ l'application devient d'ordre 4.

- Les doublements se produisent en des valeurs L_1, L_2, L_3 de plus en plus rapprochées qui convergent vers une valeur L. On constate que le rapport $\frac{L_i - L_{i-1}}{L_{i+1} - L_i}$ tend vers 4,6692016090...

- Ce nombre noté d est nommé constante universelle de Feigenbaum. Ce nombre reste valable pour toute fonction présentant la même allure que la fonction logistique.

- Elle est très utilisée dans de nombreuses situations de la théorie des systèmes dynamiques.



Arbre de Feigenbaum

3) Exemples de chaos et conclusion : retour début

3.1) Voyage à Hypérion :

Revenons en arrière de vingt ans au 5 septembre 1977. Une fusée américaine Titan III est prête à décoller de Cap Canaveral. Un satellite Voyager I est amarré à cette dernière.

Dix heures environ après le décollage, le satellite se dirige vers Jupiter et Saturne. Grâce à la loi universelle de Newton, les astronomes ont prédit le mouvement du système solaire durant 200 millions d'années.

Cependant au-delà de Jupiter, une énigme subsiste celle de Saturne qui se caractérise déjà par ses anneaux mais aussi par ses lunes.

On attribuait à Saturne dix lunes, Voyager a amené le total à quinze.

L'une de ses lunes, Hyperion a un comportement inhabituelle. Son orbite est précise et régulière mais son comportement sur celle-ci ne l'est pas. Son schéma est complexe.

Supposons que les scientifiques ait pu prédire le mouvement futur d'Hypérion grâce aux données de Voyager I et la loi de Newton. On aurait remarquer lors du passage d'un autre satellite que la prédiction était totalement fausse.

Aucun phénomène extérieur ne semble altéré le mouvement, il est seulement aléatoire.

Sa dénomination correcte est chaos.

3.2) Le chaos dans la calculatrice :

Si on prend la fonction x^2 et un germe compris entre 0 et 1. Après de nombreuses répétitions, on obtient 0. La valeur était prévisible.

En mode radian, si l'on choisit comme germe initial 0,54321 après une quarantaine d'itération à l'aide de la touche "COS", la suite convergera vers une valeur mystérieuse 0,7390851.

Remarque : Suivant la marque de l'ordinateur ou le logiciel utilisé, les valeurs trouvées peuvent être différentes.

Si l'on choisit une fonction du type kx^2-1, vous obtiendrez un aspect chaotique lorsque k=2. On remarque que d'une équation déterministe naît le chaos. Mais lorsque k=1,75, l'équation semble avoir le même avoir comportement mais après de nombreuses itérations s'installe un cycle de longueur 3. Du chaos naît la régularité.

Tout n'est que suite de chaos et d'ordre.

3.3) Réponse à : " le complexe surgit-il du simple "

Revenons sur le simple et le complexe.

La fonction " chapeau de clown " montre que la complexité de la suite dépend de la complexité de son germe.

- si le germe est rationnel (simple), la suite est calme donc simple.
- Par contre si le germe est irrationnel, la suite est turbulente donc complexe.

On ne peut donc pas créer du complexe avec du simple. S'il apparaît le chaos avec des choses simples, c'est donc que le complexe est caché dans le simple.

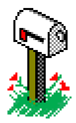
Le chaos est donc un événement stochastique dans un système déterministe.

Retour au début

Ma page dédiée aux "somme de 2, 4, 2^k carrés"

Ma page dédiée à Coluche

Ma page dédiée aux plus grandes citations du siècle (écrivains, acteurs, humoristes...)



Nombre de visiteurs :

Cette page a été mise à jour le 19 juillet 1999